## Exercice :

On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{2n+1}{3^n}$ et $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$.

1. a) Montrer que $(u_n)$ est décroissante et qu'elle converge vers un réel $\ell$.

   b) Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique convergente et calculer sa limite.

2. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $S_n = 1 + \frac{5}{3^2} + \frac{7}{3^3} + \ldots + \frac{2n+1}{3^n}$.

   a) Calculer $\sum_{k=1}^{n-1} v_k$ en fonction de n.

   b) Montrer que $S_n = 2 - \frac{1}{2\,3^{n-1}} - \frac{1}{2}u_n$ pour tout $n \geq 2$.

   c) Prouver que $(S_n)$ est une suite convergente et calculer sa limite.

1) a) $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+1}{3^{n+1}} - \frac{2n+1}{3^n} \times 3$

$= \frac{2n+3-6n-3}{3^{n+1}}$

$= -\frac{4n}{3^{n+1}} \leqslant 0$

Donc $(u_n)$ est décroissante.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $u_n = \frac{2n+1}{3^n} > 0$

Donc la suite $(u_n)$ est minorée par 0.